

Série d'exercices n°13

* Exercice 1 *L'importance de la cuillère*

Calculs d'ordre de grandeur sur la diffusion (transparents 14-16).

Lors du dernier cours de physique, vous avez étudié la loi de Fick qui met en relation le courant volumique de particules $J_n(r,t)$ et le gradient de la concentration $n_v(r,t)$. À une dimension, la loi de Fick peut s'écrire comme :

$$J_n(r,t) = -D \frac{\partial n_v(r,t)}{\partial x},$$

où la grandeur D correspond au coefficient de diffusion. Sachant que $D = 0,52 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ pour le sucre dans l'eau, déterminer l'ordre de grandeur de la durée de diffusion d'un morceau de sucre dans une tasse de café de 5 cm de diamètre.

** Exercice 2 *Fil chauffant*

Exercice sur la conduction de la chaleur en régime permanent (transparents 26-29). Il y a une symétrie cylindrique, donc il n'y a qu'une seule variable, cela reste un problème à une dimension (une variable).

On considère un fil chauffant de diamètre r_0 entouré de matériau isolant de conductivité thermique λ , formant un fil plus épais de diamètre r_1 . La puissance dégagée par unité de longueur de fil est P_l . La température extérieure est T_{ext} .

Le fil est un parfait conducteur thermique, donc il est à une température uniforme, et le gradient de température est uniquement dans la gaine isolante.

Quelle est la température à l'interface entre le fil et le matériau isolant ?

*** Exercice 3 *Fluctuations de la température du sol*

Exercice difficile qui donne un avant-goût des outils mathématiques que vous utiliserez de manière routinière les années suivantes.

On s'intéresse à la variation de la température dans le sol lorsque la température de surface oscille de façon périodique, comme c'est par exemple le cas lors d'une journée ensoleillée.

- Résoudre l'équation de diffusion de la chaleur dans le sol en prenant l'axe vertical z orienté vers le bas. On notera D le coefficient de diffusion de la chaleur et $T(z,t)$ la température dans le sol à la profondeur z et au temps t . On supposera que $T(0,t)$ est connu et vaut :

$$T(0,t) = \bar{T} + A \cos(\omega t),$$

avec \bar{T} température moyenne de la surface, A amplitude des oscillations et ω pulsation des oscillations. Vérifier que la solution s'écrit comme :

$$T(z,t) = \bar{T} + A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(-\frac{z}{\delta} + \omega t\right),$$

où $\delta = \sqrt{2D/\omega}$.

Suggestion : Réécrire l'équation de diffusion de la chaleur en fonction de $\theta = T - \bar{T}$, qui représente l'écart entre la température du sol et la température moyenne à la surface. Chercher une solution du type $\theta(z,t) = a(z) \exp(i\omega t)$.

2. Pourquoi les canalisations d'eau sont-elles enterrées à une profondeur d'au moins 25 cm ? *Données : Prendre $A = 5^\circ C$ pour l'amplitude de fluctuation quotidienne de la température à la surface du sol, et $D = 2,8 \cdot 10^{-7} m^2/s$ pour le coefficient de diffusion thermique dans le sol.*
3. Une de vos connaissances souhaite ouvrir un restaurant. À quelle profondeur sous le sol doit-elle faire creuser sa cave pour assurer une température plus ou moins constante tout au long de l'année, et ainsi assurer une bonne conservation de son vin ?

*** Exercice 4 *Température de contact*

Utilisation des résultats de l'exercice précédent pour calculer l'effusivité d'un corps (transparents 31-32).

La sensation de chaud que l'on perçoit n'est pas la même lorsque l'on touche des matériaux différents qui sont à la même température. Par exemple, on se brûle la main en touchant une plaque métallique à $100^\circ C$, alors qu'on supporte une pince en bois à la même température. On va chercher à comprendre ce phénomène dans cet exercice.

1. On met en contact deux corps à des températures différentes T_1 et T_2 , avec $T_2 > T_1$. Une fois le régime permanent établi, la température à l'interface entre ces deux corps se stabilise à une valeur intermédiaire entre T_1 et T_2 , que l'on nomme « température de contact » et que l'on note T_c . Calculer T_c en fonction de T_1 et T_2 . *Suggestion : Utiliser le résultat de la question 1 de l'exercice précédent avec $\omega \rightarrow 0$. On notera λ_1 et λ_2 les conductivités thermiques des deux corps.*
2. Calculer la température de contact entre une main et un morceau de bois à $100^\circ C$. Comparer avec le cas où le bois est remplacé par un morceau d'acier à $100^\circ C$. *Données : On approximera les propriétés thermiques de la peau par celles de l'eau, à savoir une conductivité thermique $\lambda_{peau} = 0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et une diffusivité thermique $D_{eau} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. On prendra également $\lambda_{bois} = 0,12 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $D_{bois} = 0,12 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\lambda_{acier} = 50,2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $D_{acier} = 39,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$,*