

## Série d'exercices n°13

### \* **Exercice 1** *L'importance de la cuillère*

Calculs d'ordre de grandeur sur la diffusion (transparents 14-16).

Lors du dernier cours de physique, vous avez étudié la loi de Fick qui met en relation le courant volumique de particules  $J_n(r,t)$  et le gradient de la concentration  $n_v(r,t)$ . À une dimension, la loi de Fick peut s'écrire comme :

$$J_n(r,t) = -D \frac{\partial n_v(r,t)}{\partial x},$$

où la grandeur  $D$  correspond au coefficient de diffusion. Sachant que  $D = 0,52 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  pour le sucre dans l'eau, déterminer l'ordre de grandeur de la durée de diffusion d'un morceau de sucre dans une tasse de café de 5 cm de diamètre.

### \*\* **Exercice 2** *Fil chauffant*

Exercice sur la conduction de la chaleur en régime permanent (transparents 26-29). Il y a une symétrie cylindrique, donc il n'y a qu'une seule variable, cela reste un problème à une dimension (une variable).

On considère un fil chauffant de diamètre  $r_0$  entouré de matériau isolant de conductivité thermique  $\lambda$ , formant un fil plus épais de diamètre  $r_1$ . La puissance dégagée par unité de longueur de fil est  $P_l$ . La température extérieure est  $T_{ext}$ .

Le fil est un parfait conducteur thermique, donc il est à une température uniforme, et le gradient de température est uniquement dans la gaine isolante.

Quelle est la température à l'interface entre le fil et le matériau isolant ?

### \*\*\* **Exercice 3** *Fluctuations de la température du sol*

Exercice difficile qui donne un avant-goût des outils mathématiques que vous utiliserez de manière routinière les années suivantes.

On s'intéresse à la variation de la température dans le sol lorsque la température de surface oscille de façon périodique, comme c'est par exemple le cas lors d'une journée ensoleillée.

1. Résoudre l'équation de diffusion de la chaleur dans le sol en prenant l'axe vertical  $z$  orienté vers le bas. On notera  $D$  le coefficient de diffusion de la chaleur et  $T(z,t)$  la température dans le sol à la profondeur  $z$  et au temps  $t$ . On supposera que  $T(0,t)$  est connu et vaut :

$$T(0,t) = \bar{T} + A \cos(\omega t),$$

avec  $\bar{T}$  température moyenne de la surface,  $A$  amplitude des oscillations et  $\omega$  pulsation des oscillations. Vérifier que la solution s'écrit comme :

$$T(z,t) = \bar{T} + A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(-\frac{z}{\delta} + \omega t\right),$$

où  $\delta = \sqrt{2D/\omega}$ .

*Suggestion : Réécrire l'équation de diffusion de la chaleur en fonction de  $\theta = T - \bar{T}$ , qui représente l'écart entre la température du sol et la température moyenne à la surface. Chercher une solution du type  $\theta(z,t) = a(z) \exp(i\omega t)$ .*

2. Pourquoi les canalisations d'eau sont-elles enterrées à une profondeur d'au moins 25 cm ? *Données : Prendre  $A = 5^\circ \text{C}$  pour l'amplitude de fluctuation quotidienne de la température à la surface du sol, et  $D = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  pour le coefficient de diffusion thermique dans le sol.*
3. Une de vos connaissances souhaite ouvrir un restaurant. À quelle profondeur sous le sol doit-elle faire creuser sa cave pour assurer une température plus ou moins constante tout au long de l'année, et ainsi assurer une bonne conservation de son vin ?

### \*\*\* Exercice 4      *Température de contact*

Utilisation des résultats de l'exercice précédent pour calculer l'effusivité d'un corps (transparents 31-32).

La sensation de chaud que l'on perçoit n'est pas la même lorsque l'on touche des matériaux différents qui sont à la même température. Par exemple, on se brûle la main en touchant une plaque métallique à  $100^\circ\text{C}$ , alors qu'on supporte une pince en bois à la même température. On va chercher à comprendre ce phénomène dans cet exercice.

1. On met en contact deux corps à des températures différentes  $T_1$  et  $T_2$ , avec  $T_2 > T_1$ . Une fois le régime permanent établi, la température à l'interface entre ces deux corps se stabilise à une valeur intermédiaire entre  $T_1$  et  $T_2$ , que l'on nomme « température de contact » et que l'on note  $T_c$ . Calculer  $T_c$  en fonction de  $T_1$  et  $T_2$ . *Suggestion : Utiliser le résultat de la question 1 de l'exercice précédent avec  $\omega \rightarrow 0$ . On notera  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les conductivités thermiques des deux corps.*
2. Calculer la température de contact entre une main et un morceau de bois à  $100^\circ\text{C}$ . Comparer avec le cas où le bois est remplacé par un morceau d'acier à  $100^\circ\text{C}$ . *Données : On approximera les propriétés thermiques de la peau par celles de l'eau, à savoir une conductivité thermique  $\lambda_{\text{eau}} = 0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  et une diffusivité thermique  $D_{\text{eau}} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . On prendra également  $\lambda_{\text{bois}} = 0,12 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $D_{\text{bois}} = 0,12 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\lambda_{\text{acier}} = 50,2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  et  $D_{\text{acier}} = 39,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,*